Integración:

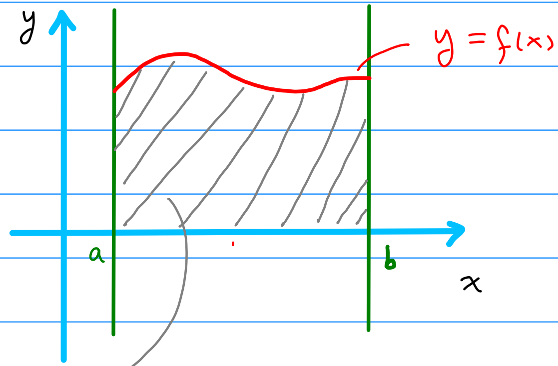
Hoy definiremos un símbolo

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

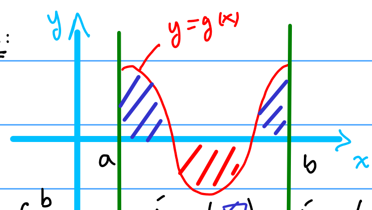
Números reales a, b

"Integral entre a y b de $f(x)$ respecto a x"



Su valor es el área de la región encerrada por el eje $y=0$, las rectas verticales $x=a$, $x=b$ y la gráfica de $f(x)$

Obs:



$\int_a^b g(x)dx = \text{Área}(\square) - \text{Área}(\square)$

Preguntas naturales:

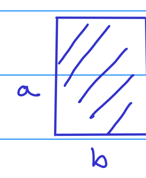
(1) ¿Qué es el ÁREA DE UNA REGIÓN?

(2) ¿Cómo calculamos integrales?

(3) ¿Para qué sirven? Aplicaciones. (ver clases posteriores)

Hoy: (1) y (2)

Qué es el área de una región?

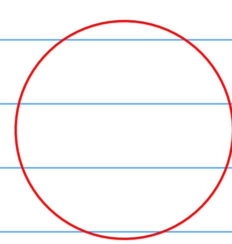


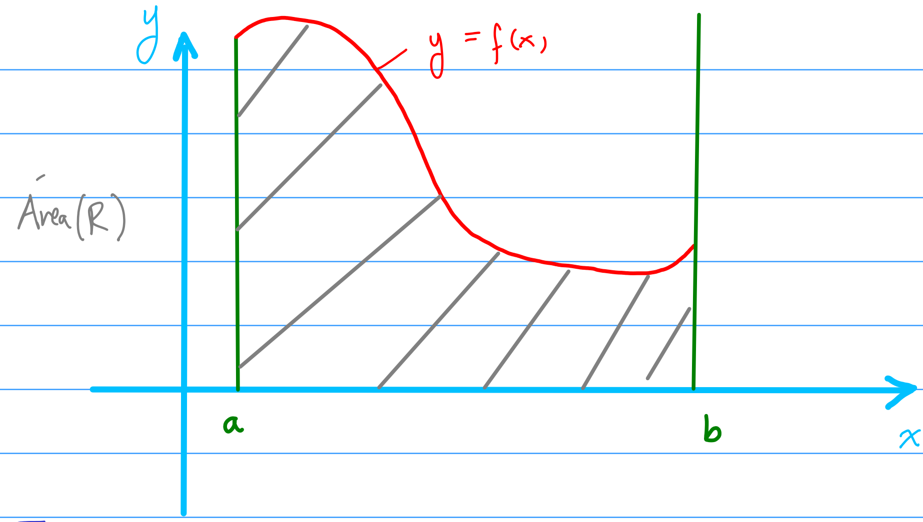
Para rectángulos la respuesta es fácil

$A = b\cdot a$

pues es el número de cuadrados de área $1\,m^2$ que caben dentro de $\square$.

Si la forma de la región es más complicada entonces esa idea no funciona, incluso un círculo no es claro como cubrirlo con cuadrados o incluso con pedazos de cuadrados sin que sobre nada... ¿Qué hacer?



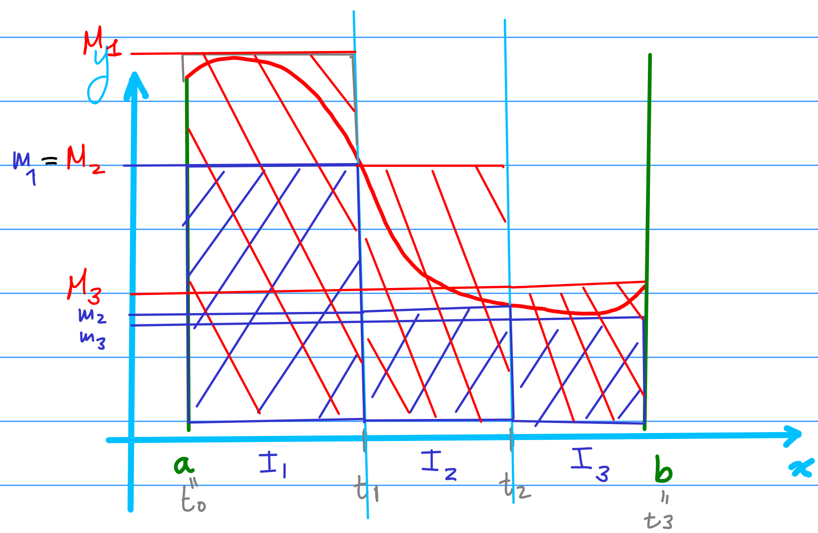


IDEA: Aproximamos la región, por adentro y por afuera por regiones cuyas áreas SÍ sepamos calcular.

$$L \subseteq R \subseteq U$$

$$\text{Área}(L) \leq \text{Área}(R) \leq \text{Área}(U)$$

Si los extremos están muy cerca entonces tenemos una idea muy razonable de la cantidad desconocida Área(R).



Concretamente:

$P_n = t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

(1) Partimos el intervalo $[a,b]$ en n pedazos iguales

(2) Calculamos m_i — mínimo de $f(x)$ en intervalo i

M_i — máximo de $f(x)$ en intervalo i

para $i = 1, 2, \dots, n$

(3) Calculamos: Área de adentro $L(f, P_n)$

Área de afuera $U(f, P_n)$

Ver dibujo para $n=3$

$$L(f,P_n) = m_1(t_1-t_0) + m_2(t_2-t_1) + m_3(t_3-t_2)$$

$$U(f,P_n) = M_1(t_1-t_0) + M_2(t_2-t_1) + M_3(t_3-t_2)$$

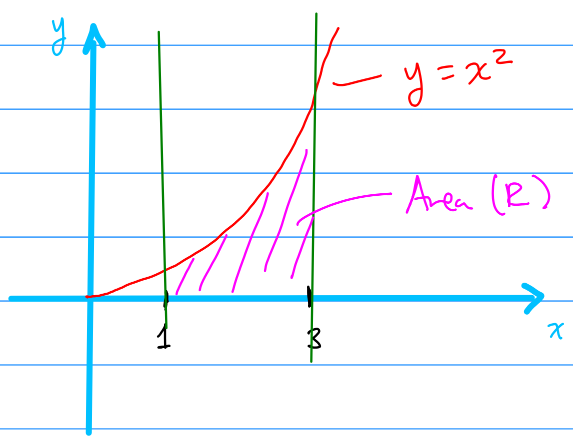
y finalmente

(4) Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,P_n) = \overline{L}$

$\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n) = \overline{U}$

$$\boxed{\text{Si estos límites coinciden entonces } \quad \overline{L} = \text{Area}(R) = \overline{U}}$$

Veamos cómo funciona esta idea en el computador en un problema concreto:



Si partimos en n pedazos entonces $\quad I_j = [t_{j-1}, t_j]$

$t_i = 1 + \frac{2}{n}\cdot i$, $\quad t_0 = 1$, $\quad t_n = 1+2 = 3$ ✓

Como la función es creciente $\quad m_i = t_{i-1}^2$, $\quad i = 1,\dots,n$

$M_i = t_i^2$

Calculamos

$$L(f,P_n) = t_0^2(t_1-t_0) + t_1^2(t_2-t_1) + \dots + t_{n-1}^2(t_n-t_{n-1})$$

$$= 1^2\left[\frac{2}{n}\right] + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2\frac{2}{n} + \dots + \left[1+2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2 = \frac{2}{n}\left[\sum_{j=1}^{n-1} 1 + 4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{n} + \frac{4}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[(n-1) + \frac{4}{n}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{4}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

[Práctico 1]

$$2 + 4 + \frac{16}{6} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$ ✓

$$U(f,P_n) = t_1^2(t_1-t_0) + t_2^2(t_2-t_1) + t_3^2(t_3-t_2) + \dots + t_n^2(t_n-t_{n-1})$$

$$= \left(1+\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) + \left(1+\frac{2\cdot 2}{n}\right)^2\frac{2}{n} + \dots + 3^2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[n + \frac{4}{n}\frac{(n+1)n}{2} + \frac{4}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[n + \frac{4}{n}\frac{(n+1)n}{2} + \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = 2 + 4 + \frac{16}{6} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$

Como: $L(f,P_n) \leq \text{Area}(R) \leq U(f,P_n)$

$n\to\infty$

$$\frac{26}{3} \leq \text{Area}(R) \leq \frac{26}{3}$$

Pudimos calcular el área de manera exacta!

Para que sea posible definir m_i, M_i

Def: Una función es integrable en $[a,b]$ si es acotada y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$$

y en ese caso definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Para estas funciones nuestro algoritmo de estimación funciona permitiéndonos calcular aproximaciones tan buenas como queramos a la integral.

Cómo son las funciones integrables?

Problema difícil... pero hay MUCHAS, por ejemplo

Teorema: Si $f(x)$ es CONTINUA en $[a,b]$ entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

2) Cómo calcularlas?

estos números pueden ser difíciles de calcular

Obs: El primer método para Calcular Integrales es mediante computador, implementando una estimación de m_i y M_i mediante un punto cualquiera x_j^* en el intervalo I_j

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\text{Aprox}(f, P_n) := \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)(t_j - t_{j-1})$$

Teorema: Si f es integrable entonces

$$\lim_{n\to\infty} \text{Aprox}(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dem: Como $x_j^* \in I_j$ tenemos que

$$m_j \leq f(x_j^*) \leq M_j$$

luego para todo $n \in \mathbb{N}$

$$L(f, P_n) \leq \text{Apox}(f, P_n) \leq U(f, P_n)$$

$$n \to \infty$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \qquad\qquad \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

pq' f es integable.

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Apox}(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

② ¿Cómo calcular integrales de manera exacta?

La clave es el siguiente Teorema, que relaciona derivadas e integrales

Teorema [Teorema fundamental del cálculo]

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$.

Si $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$, para $x \in [a,b]$

entonces

(i) $F(x)$ es diferenciable en $[a,b]$ y

(ii) $F'(x) = f(x)$

(Demostración próxima clase)

Corolario: Si $F(x)$ es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ es continua

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Dem: Defina $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, como $f(x)$ es continua por TFC $G'(x) = f(x)$ luego

$F'(x) = G'(x) \quad \forall x \in [a,b]$

y concluimos $G(x) = F(x) + K$ para alguna constante K.

Calculamos $\underbrace{G(b)}_{=\int_a^b f(t)\,dt} - \underbrace{G(a)}_{0} = F(b) - F(a)$

Ejemplo: Calcule $\int_1^3 x^2\,dx =$

Queremos $F(x)$ con $F'(x) = x^2$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ funciona (derivando $F'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2$)

luego

$$\int_1^3 x^2\,dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}$$

Mucho más fácil porque encontrar una primitiva $F(x)$ fue fácil en este caso...